فصل سوم

مشتق

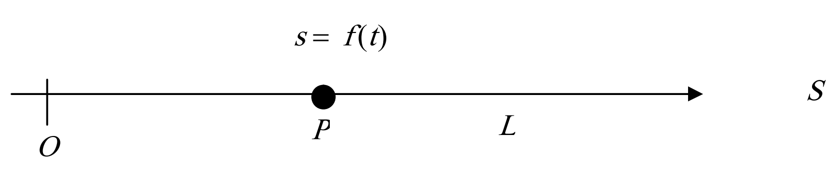
۳ . ۱ سرعت و نسبت‌های تغییر

منظور از یک نقطهٔ مادی شیئ‌ای است که از اندازه واقعی آن در مسالهٔ داده شده صرف‌نظر می شود، بنابراین می‌توان آن را به صورت ایده‌آل به عنوان یک نقطه در نظر گرفت. لذا، بنابر وضعیت‌های مورد بررسی، یک الکترون ، یک اتومبیل یا یک هواپیما را ممکن است به عنوان یک نقطهٔ مادی منظور کرد. حرکت نقطهٔ مادی P در امتداد خط مستقیم L را در نظر می‌گیریم و فرض می کنیم که s وضعیت نقطهٔ مادی ، یعنی مختص آن بر L باشد. (فرض می‌کنیم به خط L، که آن را به عنوان محور S ها می‌توانیم فرض کنیم، مبدائی مانند O،یک جهت و یک واحد طول اختصاص داده شده باشد).

فرض کنیم که وضعیت نقطه مادی در زمان t با معادلهٔ

$$s = f(t)$$

داده شده باشد. از نظر شهودی بدیهی به نظر می‌رسد که در هر لحظه از زمان t، نقطهٔ مادی دارای سرعت معین $v = v(t)$ باشد که خود تابعی از t است. اما این سرعت چگونه بایستی تعریف شود؟



شکل ۳ . ۱

برای پاسخ دادن به این پرسش، ابتدا سرعت متوسط نقطهٔ مادی را بین دو زمان t و u به صورت خارج قسمت (1) $\bar{v} = \dfrac{f(u) - f(t)}{u - t}$ تعریف می‌کنیم. مخرج (1) تغییر در زمان، متغیر مستقل، در

رفتن از مقدار قدیم t به مقدار جدید u است و صورت $f(u)-f(t)$ تغییر متناظر در وضعیت نقطهٔ مادی، متغیر وابسته، در رفتن از مقدار قدیم $f(t)$ به مقدار جدید $f(u)$ است. مناسب است که نماد ویژه‌ای برای این تغییرات‌معرفی کنیم و بنویسیم

$$\Delta t = u - t \qquad \text{و} \qquad \Delta s = f(u) - f(t)$$

که در آن Δt (بخوانید دلتا t) را نمو t و Δs (بخوانید دلتا s) را نمو s می‌نامند.

توجه کنید که

$$u = t + \Delta t \qquad , \qquad f(u) = f(t + \Delta u)$$

و بنابراین

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

بر حسب نموهای Δt و Δs، عبارت (۱) برای سرعت متوسط شکل:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

یا به عبارت معادل

$$\bar{v} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (2)$$

را می‌گیرد.

تعریف: برای نقطهٔ مادی با تابع وضعیت $s = f(t)$ **سرعت لحظه‌ای** (یا به طور ساده سرعت) در زمان t به صورت حد

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

یعنی

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود.

همچنین میتوانیم (3) را به شکل معادل $(3)'$

$$v(t) = \lim_{u \to t} \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

بنویسیم. هر یک از حدهای (3) و $(3)'$ راهی برای بیان میزان تغییر در تابع وضعیت f نسبت به t است. بنابراین، کل این بحث را می‌توان بدین صورت خلاصه کرد که سرعت یک نقطهٔ مادی متحرک عبارت از (میزان) تغییر وضعیت نقطهٔ مادی نسبت به زمان است.

مثال۱ : سنگی را در چاهی عمیق و خشک می‌اندازیم و فرض می‌کنیم که وضعیت سنگ در زمان t با معادلهٔ $s = f(t) = 16t^2$ داده شده باشد.سرعت سنگ را t ثانیه پس از سقوط و نیز $1/5$ ثانیه پس از سقوط در چاه به دست آورید.

حل: در معادلهٔ $s = f(t) = 16t^2$، متغیر t بر حسب ثانیه و متغیر s بر حسب فوت اندازه‌گیری شده است‌که مطابق شکل s به طور عمودی و به طرف پایین از دهانهٔ چاه محاسبه می‌شود.لذا بنابر (3) با $f(t) = 16t^2$ ، سرعت لحظه‌ای سنگ در زمان t عبارت از

شکا ۳ . ۲

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(t+\Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$
$$= 16 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 16 \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 16(2t) = 32t.$$

به ویژه $1/5$ ثانیه پس از رها کردن سنگ، سرعت آن برابر با $32 \times 1/5 = 48$ فوت بر ثانیه است.
همچنین بنابر $(3)'$

$$v = v(t) = \lim_{u \to t} \frac{16u^2 - 16t^2}{u - t} = 16 \lim_{u \to t} \frac{(u+t)(u-t)}{u-t}$$
$$= 16 \lim_{u \to t} (u+t) = 16(2t) = 32t.$$

تعریف : فرض کنیم هدف محاسبه میزان تغییر تابع سرعت $v(t)$ نسبت به زمان باشد. در این صورت تابع جدیدی مانند

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \qquad (4)$$

به دست می‌آوریم که **شتاب** نامیده می‌شود. از (4) و مثال قبل، شتاب سنگ در حال سقوط برابر است با

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{32(t+\Delta t) - 32t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{32\Delta t}{\Delta t} = 32$$

یعنی در این حالت شتاب دارای مقدار ثابت ۳۲ فوت بر مجذور ثانیه است.

خط مماس :بسیاری از موضوع های مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، بستگی به مسالهٔ پیدا کردن خط مماس بر منحنی مفروض در یک نقطهٔ معین از آن دارد. اگر منحنی یک دایره باشد،از هندسهٔ صفحه می‌دانیم که خط مماس در نقطهٔ P بر دایره به صورتی خطی تعریف می‌شود که دایره را تنها در یک نقطه قطع می‌کند. این تعریف برای یک منحنی در حالت کلی کافی نیست.به عنوان مثال در شکل زیر خطی که در نقطهٔ P بر منحنی مماس است، در نقطهٔ دیگری مانند Q منحنی را قطع می‌کند.

شکل ۳ . ۳

در این قسمت به تعریفی مناسب از خط مماس بر گراف یک تابع در یک نقطه از گراف می‌رسیم. ما بدین کار می‌پردازیم ، با بررسی این مطلب که چگونه شیبِ (ضریب زاویهٔ) خط مماس در یک نقطه را تعریف کنیم، زیرا اگر شیب یک خط و نقطه ای از آن بر ما معلوم باشد، خط مشخص می‌شود.

فرض کنیم تابع f در x_1 پیوسته باشد.می‌خواهیم شیب خط مماس بر گراف تابع f در نقطهٔ $P(x_1, f(x_1))$ را تعریف کنیم. فرض کنیم $Q(x_2, f(x_2))$ نقطهٔ دیگری از گراف تابع f باشد. خطی از P و Q می‌گذرانیم. هر خطی که از دو نقطهٔ یک منحنی بگذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. بنابراین خط گذرنده از P و Q یک خط قاطع است.در شکل زیر Q، در سمت راست P است. اما در حالت کلی Qممکن است در سمت راست یا چپ Pباشد. حال تفاضل طول‌های Q و P را با Δx نمایش می‌دهیم، یعنی $\Delta x = x_2 - x_1$

شکل ۳ . ۴

که Δx ممکن است مثبت یا منفی باشد. شیبِ (ضریب زاویه) خط قاطع PQ به صورت

$$m_{pQ}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف می‌شود البته به شرط آنکه PQ عمودی نباشد. چون $x_2=x_1+\Delta x$ ، می‌توانیم معادلهٔ بالا را به صورت $m_{PQ}=\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ بنویسیم. اکنون ، نقطهٔ P را به عنوان نقطهٔ ثابت در نظر می‌گیریم و نقطهٔ Q را در امتداد منحنی به طرف P حرکت می‌دهیم، یعنی، Q به P میل می‌کند.این مطلب را به صورت معادل می توان چنین بیان کرد که Δx به صفر میل می‌کند. وقتی این اتفاق رخ دهد، خط قاطع حول نقطهٔ ثابت P می‌چرخد. اگر این خط قاطع دارای یک وضعیت حدی باشد، آنگاه همین وضعیت حدی است‌که ما می‌خواهیم خط مماس بر نمودار تابع در P در نظرگرفته شود.بنابراین می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابع در P حدّ m_{PQ} باشد وقتی Δx به سمت صفر میل می‌کند، البته در صورتی که این حد موجود باشد.اگر $\lim\limits_{\Delta x\to 0} m_{PQ}=\pm\infty$ ، آنگاه وقتی $\Delta x\to 0$، خط PQ به سمت خطی میل می‌کند که از P گذشته و موازی با محور Y هاست. در این حالت بایستی خط مماس بر نمودار تابع در P خط $x=x_1$ باشد. بحث بالا ما را به تعریف زیر می‌رساند.

تعریف : اگر تابع f در x_1 پیوسته باشد، آنگاه **خط مماس** بر نمودار تابع f در نقطهٔ $P(x_1, f(x_1))$ عبارت است از

(a) خط گذرنده از P با شیب $m(x_1)$، که به صورت

$$m(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

داده شده است ، هرگاه این حد وجود داشته باشد.

(b) خط $x=x_1$ هرگاه $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=\pm\infty$.

اگر هیچ کدام از (a) و (b) برقرار نباشد، آنگاه در نقطهٔ $P(x_1, f(x_1))$ بر گراف تابع f خط مماس وجود ندارد.

مثال ۲ : شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)=x^2-4x+3$ در نقطهٔ (x_1, y_1) را پیدا

کنید.

حل: داریم

$$m(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x_1+\Delta x)^2-4(x_1+\Delta x)+3\right]-\left[x_1^2-4x_1+3\right]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_1\Delta x+(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}$$

و با توجه به اینکه $\Delta x\neq 0$،بدست می آوریم

$$m(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_1+\Delta x-4)=2x_1-4.$$

همانطور که در مطالب بالا دیده شد، دو مفهوم، یکی از فیزیک و دیگری از هندسه به زبان ریاضی دارای شکل یکسانی بودند. ایندو در حقیقت نمونهٔ مثال‌های فراوانی هستند که در شاخه‌های مختلف علوم از مفهومی ریاضی به نام مشتق استفاده می‌شود. اینک به تعریف دقیق این مفهوم می‌پردازیم.

تعریف : فرض کنیم تابع f در یک بازه باز شامل نقطهٔ a تعریف شده باشد. گوییم تابع f در نقطهٔ a **مشتق پذیر** است در صورتی که $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد. این مقدار حد را با $f'(a)$ نشان می‌دهیم و آن را **مشتق تابع** f **در نقطهٔ** a می‌نامیم. بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) \qquad (5)$$

اگر قرار دهیم $x-a=\Delta x$، آنگاه معلوم است که $x\to a$ متناظر با $\Delta x\to 0$است و(5) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a) \qquad (6)$$

همچنین اگر قرار دهیم $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ آن گاه (6) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a) \qquad (7)$$

$(5),(6),(7)$ همگی به یک معنی هستند و بر حسب شرایط می‌توان به دلخواه از هر یک که ساده‌تر به نظر می‌رسد، استفاده کرد.

مثال۳: (i) مشتق تابع $f(x)=3x^2+12$ را در یک نقطهٔ دلخواه x حساب کنید.

(ii)در قسمت (i)مشتق تابع را در 2پیدا کنید، یک بار با استفاده از رابطهٔ(5) و بار دیگر با استفاده از رابطهٔ (6).

حل : (i) اگر x نقطهٔ دلخواهی در حوزهٔ تعریف تابع f باشد، آنگاه با استفاده از (6) داریم

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[3(x+\Delta x)^2+12\right]-\left(3x^2+12\right)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+12-3x^2-12}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x)=6x.$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \qquad (ii)$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(3x^2+12\right)-24}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=3\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=3\lim_{x\to 2}(x+2)=12.$$

همچنین

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[3(2+\Delta x)^2+12\right]-\left[3\left(2^2\right)+12\right]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12+12\Delta x+3(\Delta x)^2+12-12-12}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(12+3\Delta x)=12$$

مثال ۴: (i) مشتق تابع $f(x)=\dfrac{2+x}{3-x}$ را در یک نقطهٔ دلخواه x به دست آورید.

(ii) اگر $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ، پیدا کنید $f'(x)$ را.

(iii) در قسمت (ii)نشان دهید که $f'(0)$ موجود نیست.

حل: (i)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2+x+\Delta x}{3-x-\Delta x}-\dfrac{2+x}{3-x}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3-x)(2+x+\Delta x)-(2+x)(3-x-\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\Delta x}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5}{(3-x-\Delta x)(3-x)}=\frac{5}{(3-x)^2}\,.$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (ii)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{2/3}-x^{2/3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^{2/3} - x^{2/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}\ x^{2/3} + x^{4/3}\right]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}\ x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}\ x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}}$$

$$= \frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}} = \frac{2x}{3x^{4/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

(iii) چون $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}} = 0 = f(0)$، تابع f در 0 پیوسته است. حال نشان می‌دهیم که این تابع در 0 مشتق پذیر نیست. داریم

شکل ۳ . ۵

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

و

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)\, f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = -\infty.$$

بنابراین نتیجه می گیریم که خط مماس بر نمودار تابع در مبداء محور Y هاست.

این مثال نشان می‌دهد که $f'(x)$ می‌تواند برای بعضی از مقادیر x در حوزهٔ تعریف f وجود داشته باشد، ولی ممکن است برای نقاط دیگری از حوزهٔ تعریف f وجود نداشته باشد.

تعریف : گوییم تابع f **در** x_1 **مشتق پذیر** است، هر گاه $f'(x_1)$ وجود داشته باشد.

بنابراین، تابع $f(x) = x^{2/3}$ در تمامی نقاط به استثنای 0 مشتق‌پذیر است.

تعریف: تابع f را **مشتق‌پذیر** نامیم، در صورتی که درهرنقطه از حوزهٔ تعریفش مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۵ : فرض کنیم f و g دو تابع باشند که حوزه‌های تعریف آنها اعداد حقیقی R است. به علاوه فرض کنیم:

(i) برای هر $x\in R$ ، $g(x)=xf(x)+1$.

(ii) برای هر $x,y\in R$ ، $g(x+y)=g(x).g(y)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

ثابت کنید که $g'(x)=g(x)$.

حل: با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)g(\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)(g(\Delta x)-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x).\Delta x f(\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0} g(x).\,f(\Delta x)=g(x)\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=g(x).1=g(x).\end{aligned}$$

۳ . ۲ مشتق‌پذیری و پیوستگی

در مثال ۴ (iii) دیدیم که تابع $f(x)=x^{2/3}$ در 0 پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. بنابراین، ممکن است پیوستگی تابع در یک نقطه، مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه ندهد. به هر حال، قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مشتق پذیری یک تابع پیوستگی آن را تضمین می نماید.

قضیهٔ ۱: اگر تابع f در نقطهٔ x_1 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در x_1 پیوسته است.

اثبات: برای اثبات پیوستگی f در x_1 بایستی نشان دهیم که سه شرط تعریف پیوستگی برقرار است. یعنی، بایستی نشان دهیم که (i) $f(x_1)$ موجود است، (ii) $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ موجود است، (iii) $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=f(x_1)$. چون f در x_1 مشتق پذیر است، پس بایستی f در x_1 تعریف شده باشد، یعنی $f(x_1)$ موجود باشد. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to x_1}\left[f(x)-f(x_1)\right]=\lim_{x\to x_1}(x-x_1).\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

امّا

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f(x_1) \text{ و } \lim_{x\to x_1}(x-x_1)=0$$

پس با استفاده از قضیهٔ حد حاصلضرب دو تابع داریم

$$\lim_{x\to x_1}\left[f(x)-f(x_1)\right]=\lim_{x\to x_1}(x-x_1).\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=0.f'(x_1)=0\,.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=\lim_{x\to x_1}\left[f(x)-f(x_1)+f(x_1)\right]=\lim_{x\to x_1}\left[f(x)-f(x_1)\right]+\lim_{x\to x_1}f(x_1)=0+f(x_1)$$

که به دست می‌دهد $\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1)$. بنابراین تابع در x_1 پیوسته بوده و اثبات تمام است.

نکته: مثال ۴ (iii) نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس قضیهٔ بالا برقرار نیست. قبل از ارائه مثال دیگری در این مورد، به تعریف مشتق یک طرفه می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم تابع f در x_1 تعریف شده باشد. در این صورت **مشتق راست** f در x_1، که با $f'_+(x_1)$ نشان داده می‌شود، به صورت $f'_+(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$
یا، به عبارت معادل، به صورت $f'_+(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ تعریف می‌شود، هرگاه این حد وجود داشته باشد.

تعریف: فرض کنیم تابع f در x_1 تعریف شده باشد. در این صورت **مشتق چپ** f در x_1، که با $f'_-(x_1)$ نشان داده می‌شود، به صورت $f'_-(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$
یا، به عبارت معادل ،به صورت $f'_-(x_1)=\lim_{x-\bar{x}_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ تعریف می‌شود، هرگاه این حد وجود داشته باشد.

به سادگی دیده می‌شود که، شرط لازم و کافی برای آنکه $f'(x_1)$ موجود باشد، آن است که $f'_+(x_1)$ و $f'_-(x_1)$ موجود بوده و داشته باشیم $f'_+(x_1)= f'_-(x_1)$.

مثال ۶: فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x<3\\ 8-x & ,x\geq 3\end{cases}$ تعریف شده باشد.

پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در ۳ بررسی کنید.

حل: داریم $f(3)=5$ ، $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-1)=5$

و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(8-x)=5$ پس $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5= f(3)$

و تابع در 3 پیوسته است. حال به بررسی مشتق‌های چپ و راست در 3 می‌پردازیم.

شکل۳ . ۶

$$f'_-(3)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left[2(3+\Delta x)-1\right]-5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{6+2\Delta x-6}{\Delta x}=2$$

$$f'_+(3)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left[8-(3+\Delta x)\right]-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\,.$$

اکنون به دلیل آنکه $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)- f(3)}{\Delta x}$ وجود ندارد، f در 3 مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۷: (i) به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & , & x\leq x_0\\ ax+b & , & x>x_0\end{cases}$ در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است؟

(ii) مشتق توابع $\sin x$ و $\cos x$ را به دست آورید.

(iii) نشان دهید که توابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$ و $g(x)=|x|$، در $x=0$ پیوسته بوده، ولی مشتق‌پذیر نمی‌باشند.

حل: (i) اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ ۱، در x_0 پیوسته است. پس برای یافتن برای مقادیر b, a از هر دو شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری در x_0 استفاده می‌کنیم.

داریم

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} x^2 = x_0^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^+}(ax+b)=ax_0+b$$

قرار می‌دهیم $ax_0+b=x^2{}_0 \quad (۱)$.

همچنین

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

و

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(x_0+\Delta x)+b-x^2{}_0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(ax_0+b)+a\Delta x-x_0^2}{\Delta x}$$

و با استفاده از (۱) خواهیم داشت

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a\,.$$

قرار می‌دهیم $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. بنابراین $b=-x_0^2, a=2x_0$.

(ii) با استفاده از دستورهای مثلثاتی داریم

$$\begin{cases}\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\\ \cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\end{cases}$$

و بنابراین

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

اما بنابر خواص پیوستگی

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\sin x$$

و به علاوه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$. نتیجه می‌شود که $(\cos x)'=-\sin x$ و $(\sin x)'=\cos x$.

(iii) داریم $0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$.

از اینجا، با استفاده از قضیهٔ فشردگی، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$$

پس تابع $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است. اما

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

و بنابراین مثال ۵ از فصل دوم، $\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$ موجود نیست. پس تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

در مورد تابع $f(x)=|x|$ داریم

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

و

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

بنابراین $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$ و تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است. و اما در مورد مشتق‌پذیری

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

و

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

پس $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ و تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۸: فرض کنیم f تابعی با حوزهٔ تعریف $Df = R$ باشد و به ازای هر $a,b \in R$ داشته باشیم، $f(a+b) = f(a).f(b)$. به علاوه فرض کنیم که $f(0)=1$ و $f'(0)$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که به ازای هر $x \in R$ ، $f'(x)$ وجود داشته و داریم $f'(x) = f'(0).f(x)$.

حل : با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\left(f(\Delta x) - 1\right)}{\Delta x} = f(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f'(0).f(x).$$

مثال ۹: (i) ثابت کنید که اگر $f(x)$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = f(a) - af'(a).$$

(ii) فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & , x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , x > 1 \end{cases}$ تعریف شده باشد.
مقادیر b,a را طوری تعیین کنید که $f'(1)$ موجود باشد.

(iii) فرض کنیم که $Df = R$، و برای هر $x \in R$ داشته باشیم، $|f(x)| \le x^2$. ثابت کنید که f در $x=0$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(0) = 0$.

حل: (i) می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x \to 0} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \lim_{x \to 0} \frac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(a)(x-a) - a(f(x) - f(a))}{x-a} = \lim_{x \to 0}\left[f(a) - a.\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right]$$
$$= f(a) - a\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f(a) - af'(a).$$

(ii) ابتدا شرطی را می‌نویسیم که $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد، یعنی

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

داریم

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}\left(ax^2 + b\right) = a + b$$

و

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

بنابراین (1) $a+b=1$. سپس شرطی را می‌نویسیم که تابع در $x=1$ مشتق پذیر باشد،
یعنی

$$f'_-(1) = f'_+(1)$$

اما داریم

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(1+\Delta x)^2+b-(a+b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a+a(\Delta x)^2+2a\Delta++b-a-b}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(\Delta x)^2+2a\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(a\Delta x+2a)=2a$$

و

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-(a+b)}{\Delta x}$$

و با توجه به (1)

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1.$$

بنابراین (2) $\quad 2a=-1$. اکنون از (1) ، (2)بدست می آوریم، $a=\frac{-1}{2}, b=\frac{3}{2}$.

(iii) داریم

$$|f(0)|\le 0^2\Rightarrow |f(0)|=0\Rightarrow f(0)=0\quad .$$

حال بنابر تعریف مشتق

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

از طرفی برای $\Delta x\neq 0$

$$|f(\Delta x)|\le(\Delta x)^2\Rightarrow\frac{|f(\Delta x)|}{|\Delta x|}\le\frac{(\Delta x)^2}{|\Delta x|}\Rightarrow\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|\le|\Delta x|.$$

بنابراین $0\le\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|\le|\Delta x|$ و با استفاده از قضیهٔ فشردگی دیده می شود $\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|=0$.

پس $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

مثال ۱۰: (i) فرض کنیم توابع f و g به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f(x)=3x+|x| \text{ و } g(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|$$

ثابت کنید که $g'(0)$ و $f'(0)$ موجود نبوده ولی $(fog)'(0)$ وجود دارد.

(ii) اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، ثابت کنید که

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$

حل: (i)داریم

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(3\Delta x+|\Delta x|)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3\Delta x+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{4\Delta x}{\Delta x}=4$$

و

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(3\Delta x+|\Delta x|)-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

پس $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ و بنابراین $f'(0)$ موجود نسیت.

همچنین

$$g'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left(\frac{3}{4}\Delta x-\frac{1}{4}|\Delta x|\right)-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{3}{4}\Delta x-\frac{1}{4}\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{2\Delta x}=\frac{1}{2}$$

و

$$g'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left(\frac{3}{4}\Delta x-\frac{1}{4}|\Delta x|\right)-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{3}{4}\Delta x+\frac{1}{4}\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

پس $g'_+(0)\neq g'_-(0)$ و بنابراین $g'(0)$ وجود ندارد. حال به بررسی مشتق تابع fog در $x=0$ می‌پردازیم، ابتدا $(fog)(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)+|g(x)|=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|\right)+\left|\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|\right|=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}|x|+\left|\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|\right|.$$

داریم

$$(fog)'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(fog)(0+\Delta x)-(fog)(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{9}{4}\Delta x-\frac{3}{4}|\Delta x|+\left|\frac{3}{4}\Delta x-\frac{1}{4}|\Delta x|\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{9}{4}\Delta x-\frac{3}{4}\Delta x+\left|\frac{3}{4}\Delta x-\frac{1}{4}\Delta x\right|}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{6}{4}\Delta x+\frac{2}{4}\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

و

$$(fog)'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(fog)(0+\Delta x)-(fog)(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{9}{4}\Delta x-\frac{3}{4}|\Delta x|+\left|\frac{3}{4}\Delta x-\frac{1}{4}|\Delta x|\right|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{9}{4}\Delta x+\frac{3}{4}\Delta x+\left|\frac{3}{4}\Delta x+\frac{1}{4}\Delta x\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

بنابراین $(fog)'_+(0)=(fog)'_-(0)$ و لذا $(fog)'(0)$ موجود است.

(ii) داریم

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}+\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-2\Delta x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}=\frac{1}{2}f'(a)+\frac{1}{2}f'(a)=f'(a).$$

۳.۳ چند قضیهٔ

از ابتدای فصل سوم تا اینجا، مشتق تابع در یک نقطه را با استفاده از تعریف محاسبه کردیم. اما، همانطور که در فصل دوم و در مورد حد تابع دیدیم، این عمل معمولاً طولانی و خسته‌کننده است. بنابراین، در این قسمت به بیان و اثبات قضایایی می‌پردازیم که به کمک آنها محاسبهٔ مشتق توابع ساده‌تر می‌شود و از حالا به بعد در محاسبهٔ مشتق توابع همواره از این قضایا استفاده می‌کنیم،مگر اینکه در موردی خاص به صراحت از ما خواسته شود که از تعریف مشتق استفاده کنیم.

قضیهٔ ۲: فرض کنیم توابع f و g در نقطهٔ a مشتق پذیر بوده و c عدد ثابتی باشد. در این صورت توابع $f\pm g$,cf و $f.g$ در a مشتق پذبر بوده و داریم

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(cf)'(a)=cf'(a)$

ج) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

اثبات :

الف) اگر $h = f+g$ تعریف کنیم، آنگاه برای هر $x\in Df\cap Dg$ داریم

$$h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

بنابراین

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(a+\Delta x)+g(a+\Delta x))-(f(a)+g(a))}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(a+\Delta x)-f(a))+(g(a+\Delta x)-g(a))}{\Delta x}$$

و با توجه به مشتق‌پذیری f و g در a

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}=f'(a)+g'(a).$$

پس $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$$

ب) بر طبق تعریف، برای هر $x\in Df$ داریم $(cf)(x)=cf(x)$. اکنون می‌توان نوشت

$$(cf)'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(cf)(a+\Delta x)-(cf)(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(a+\Delta x)-cf(a)}{\Delta x}=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=cf'(a).$$

ج) اگر $h=f.g$ تعریف کنیم، آنگاه برای هر $x\in Df\cap Dg$ داریم

$$h(x)=f(x).g(x)$$

حال

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)g(a+\Delta x)-f(a)g(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)g(a+\Delta x)-f(a)g(a+\Delta x)+f(a)g(a+\Delta x)-f(a)g(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{\frac{g(a+\Delta x)(f(a+\Delta x)-f(a))}{\Delta x}+\frac{f(a)(g(a+\Delta x)-g(a))}{\Delta x}\}$$

و با توجه به این که توابع f و g در a پیوسته هستند، داریم

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}g(a+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$+f(a)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}=g(a)f'(a)+f(a)g'(a).$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

تبصره: اگر $f(x)=c$ تابعی ثابت باشد، آنگاه $f'(x)=0$. زیرا

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

قضیهٔ ۳: فرض کنیم توابع f و g هر دو در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند و به علاوه g در یک همسایگی a مخالف صفر باشد،در این صورت توابع $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ در a مشتق‌پذیر بوده و داریم

الف) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$.

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$.

اثبات: الف) اگر $h=\frac{1}{g}$ تعریف گردد، آنگاه داریم $h(x)=\frac{1}{g(x)}$. پس

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+\Delta x)}-\frac{1}{g(a)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a)-g(a+\Delta x)}{\Delta x g(a)g(a+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-(g(a+\Delta x)-g(a))}{\Delta x}}{g(a)(a+\Delta x)}=\frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\quad .$$

ب)فرض کنیم $h=\frac{f}{g}$، پس $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ، بنابراین

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(a+\Delta x)}{g(a+\Delta x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)g(a)-f(a)g(a+\Delta x)}{\Delta x g(a)g(a+\Delta x)}.$$

با اضافه و کم کردن $f(a)g(a)$ در صورت کسر به دست می‌آوریم

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(a+\Delta x)}{\Delta x g(a)g(a+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[g(a).\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right]-f(a)\frac{[g(a+\Delta x)-g(a)]}{\Delta x}}{g(a)g(a+\Delta x)}$$

$$=\frac{\lim_{\Delta x\to 0}g(a).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}f(a)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0}g(a).\lim_{\Delta x\to 0}g(a+\Delta x)}$$

$$=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g(a).g(a)}=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

تعمیم: فرض کنیم توابع $f_1, f_2, ..., f_n$ همگی در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند. در این صورت با استفاده از قضیهٔ ۲ و استقرای ریاضی به سادگی دیده می‌شود که تابع $f_1 \pm f_2 \pm ... \pm f_n$ در a مشتق‌پذیر است و داریم

$$\left(f_1 \pm f_2 \pm ... \pm f_n\right)'(a) = f_1'(a) \pm f_2'(a) \pm ... \pm f_n'(a)$$

قضیهٔ ۴: الف) برای هر $n \in N$، تابع $f(x) = x^n$ در هر نقطه a مشتق پذیر است و

$$f'(a) = na^{n-1}$$

ب) برای هر $q \in N$،تابع $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$ در هر نقطه $a \neq 0$ که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده باشد، مشتق‌پذیر است و $f'(a) = \frac{1}{q}a^{\frac{1}{q}-1}$.

اثبات:

الف) داریم

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^n - a^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^n + na^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n - a^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1} \right\} = na^{n-1}.$$

ب)داریم $f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}}}{\Delta x}$.

برای محاسبه این حد از اتحاد

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

استفاده کرده و می نویسیم

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(a+\Delta x)^{1/q} - a^{1/q}\right]\left[(a+\Delta x)^{(q-1)/q} + (a+\Delta x)^{(q-2)/q}.a^{1/q} + ... + a^{(q-1)/q}\right]}{\Delta x\left[(a+\Delta x)^{(q-1)/q} + (a+\Delta x)^{(q-2)/q}.a^{1/q} + ... + a^{(q-1)/q}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^{q/q} - a^{q/q}}{\Delta x\left[(a+\Delta x)^{(q-1)/q} + (a+\Delta x)^{(q-2)/q}a^{1/q} + ... + a^{(q-1)/q}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left[(a+\Delta x)^{(q-1)/q} + (a+\Delta x)^{(q-2)/q}a^{1/q} + ... + a^{(q-1)/q}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(a+\Delta x)^{(q-1)/q} + (a+\Delta x)^{(q-2)/q} a^{1/q} + \ldots + a^{(q-1)/q}}$$
$$= \frac{1}{a^{(q-1)/q} + a^{(q-1)/q} + \ldots + a^{(q-1)/q}}.$$

چون دقیقاً تعداد q جمله در مخرج کسر بالا وجود دارد ، پس $f'(a) = \frac{1}{qa^{(q-1)/q}}$ یا، معادل با آن $f'(a) = \frac{1}{q} a^{(\frac{1}{q}-1)}$ و اثبات تمام است.

تبصره :

۱)با استفاده از قضایای ۲ و ۴ دیده می‌شود که چند جمله‌ای درجهٔ n

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \qquad (c_n \neq 0)$$

در هر نقطهٔ دلخواه a مشتق‌پذیراست و داریم

$$P_n'(a) = c_1 + 2c_2 a + 3c_2 a^2 + \ldots + nc_n a^{n-1}$$

۲)برای هر $n \in N$ تابع $f(x) = x^{-n}$ ،در هر نقطهٔ $a \neq 0$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(a) = -na^{-n-1}$. زیرا $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ و با استفاده از قضیهٔ ۳ (الف) داریم

$$f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{(a^n)^2} = -na^{-n-1}.$$

۳)برای هر $m \in N$ مشتق تابع $f(x) = x^{-1/m}$ در هر نقطهٔ $a > 0$ وجود دارد و برابر است با $f'(a) = \frac{-1}{m} a^{\frac{-1}{m}-1}$. زیرا $f(x) = x^{\frac{-1}{m}} = \frac{1}{x^{1/m}}$ ، و با استفاده از قضیه‌های ۳ و ۴ داریم

$$f'(a) = \frac{\frac{-1}{m} a^{1/m-1}}{(a^{1/m})^2} = \frac{-1}{m} a^{\frac{-1}{m}-1}.$$

۴) اگر توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ همگی در نقطهٔ x مشتق‌پذیر باشند، آن گاه تابع $g = f_1 f_2 \ldots f_n$ در x مشتق‌پذیر خواهد بود و داریم

$$g'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x) f_2(x) \ldots f_n'(x_n).$$

از قضیهٔ ۲ (ج)، به صورت مکرر، استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، اگر $g = f_1\Psi = f_1 f_2 f_3$ آنگاه داریم

$$g'(x) = f_1'(x)\Psi(x) + f_1(x)\Psi'(x)$$

$$= f_1'(x) f_2(x) f_3(x) + f_1(x)\left[f_2'(x) f_3(x) + f_2(x) f_3'(x)\right]$$

$$= f_1'(x) f_2(x) f_3(x) + f_1(x) f_2'(x) f_3(x) + f_1(x) f_2(x) f_3'(x)$$

و به همین ترتیب می‌توان حکم را برای هر تعداد از عوامل حاصلضرب ثابت کرد.

مثال ۱۲: مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه از حوزه تعریف آنها محاسبه کنید:

(i) $f(x) = x^2 \sin x$ $\qquad$ (ii) $f(x) = \sqrt{x}\sin x\cos x$

(iii) $f(x) = \tan x$ $\qquad$ (iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x^3 + 3}$

(v) $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

حل: از تمامی قضایایی که تا اینجا در مورد مشتق ثابت کرده‌ایم استفاده می‌کنیم.

(i) اگر $f(x) = x^2 \sin x$ آنگاه

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x.$$

(ii) اگر $f(x) = \sqrt{x}\sin x\cos x$ ، آن‌گاه

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' \sin x\cos x + \sqrt{x}(\sin x)'\cos x + \sqrt{x}\sin x(\cos x)'$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\sin x\cos x + \sqrt{x}(\cos x)\cos x + \sqrt{x}\sin x(-\sin x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\cos x + \sqrt{x}\cos^2 x - \sqrt{x}\sin^2 x.$$

و $f'(x)$ را می‌توان به شکل ساده‌تر $f'(x)=\frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos 2x$ نیز نوشت.

(iii) اگر $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ آنگاه

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{(\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

(iv) اگر $f(x)=\frac{x^2-5x}{x^3+3}$ آنگاه

$$f'(x)=\frac{(x^2-5x)'(x^3+3)-(x^2-5x)(x^3+3)'}{(x^3+3)^2}$$
$$=\frac{(2x-5)(x^3+3)-(x^2-5x)(3x^2)}{(x^3+3)^2}=\frac{-x^4+10x^3+6x-15}{(x^3+3)^2}$$

به شرط آنکه $x\neq-\sqrt[3]{3}$.

(v) اگر $f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ آنگاه

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}$$
$$=\sec x.\tan x.$$

مثال ۱۳: اتحاد $(x\neq1)$ $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ را ثابت کرده و با استفاده از قوانین مشتق فرمول‌هایی برای حاصلجمع های زیر بدست آورید:

(a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

(b) $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$

حل: فرض کنیم $S_n=1+x+x^2+\ldots+x^n$ که از آن نتیجه می‌گیریم

$$xS_n=x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}$$

می‌توان نوشت

$$xS_n-S_n=\left(x+x^2+\ldots+x^{n+1}\right)-\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)$$
$$=x^{n+1}-1$$

یا

$$S_n(x-1)=x^{n+1}-1$$

چون $x-1\neq 0$، از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم $S_n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

(a) اگر از طرفین اتحاد نسبت به x مشتق بگیریم، به دست می‌آوریم

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-\left(x^{n+1}-1\right)}{(x-1)^2}$$

و یا

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(x+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

(b) طرفین آخرین تساوی در قسمت (a) را در x ضرب می‌کنیم

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{nx^{n+2}-(x+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

اکنون اگر از این تساوی نسبت به x مشتق بگیریم و نتیجه را ساده کنیم، به دست می‌آوریم

$$1+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+\left(2n^2+2n-1\right)x^{n+1}-nx^{n+2}}{(x-1)^3}.$$

۳ . ۴ مشتق تابع مرکب

قواعد مشتق‌گیری که تا کنون ثابت کرده‌ایم، هیچکدام به ما نمی‌گویند که چگونه از توابع مرکبی مانند $\sqrt{x^2+1}$ یا $\sin(\sin x)$ مشتق بگیریم. بنابراین، در این قسمت قانون دیگری بیان می‌کنیم که مشتق یک تابع مرکب را بر حسب مشتقات توابع تشکیل دهنده آن به دست می‌دهد. این قانون به قاعده زنجیری معروف است و مشتق‌گیری بسیاری از توابع را امکان‌پذیر می‌سازد. قبل از بیان اثبات قاعده زنجیری مطلب زیر را که مورد نیاز در قضیه است، ثابت می‌کنیم.

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$، آن است که $f(x)=c+\alpha(x)$ که در آن $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

اثبات: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$ و فرض کنیم $\alpha(x)=f(x)-c$. در این صورت به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

اگر $0<|x-x_0|<\delta$، آنگاه $|f(x)-c|=|\alpha(x)|<\varepsilon$.

و بنابراین $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. برعکس از $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-c)=0$ و بنابراین $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

قضیهٔ ۵ (قاعدهٔ زنجیری- مشتق تابع مرکب): اگر g در x مشتق‌پذیر بوده و f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع مرکب $\varphi = fog$ در x مشتق‌پذیر است و

$$\varphi'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

اثبات: چون f در $y = g(x)$ مشتق‌پذیر است، داریم

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y} = f'(y).$$

بنابراین، با استفاده از نکتهٔ بالا

$$\frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y} = f'(y) + \varphi(\Delta y) \qquad (1)$$

که در آن $\varphi(\Delta y)$ تابعی است که برای آن

$$\lim_{\Delta y \to 0} \varphi(\Delta y) = 0 \qquad (2)$$

با ضرب (1) در Δy، می‌بینیم که نمو f در y می‌تواند به صورت

$$\Delta f(y) = f(y+\Delta y) - f(y) = \left[f'(y) + \varphi(\Delta y)\right]\Delta y \qquad (3)$$

نوشته شود. چون برای $\Delta y = 0$، داریم $\Delta f(y) = 0$، رابطه (3) وقتی که $\Delta y = 0$ اختیار شود برای هر انتخاب $\varphi(0)$ معتبر باقی می‌ماند. بنابراین می‌توان $\varphi(0) = 0$ قرار داد، که این $\varphi(\Delta y)$ را در 0 پیوسته می‌سازد. اکنون فرض کنیم

$$\Delta y = \Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$$

و (3) را بر Δx تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌دهد

$$\frac{\Delta f(y)}{\Delta x} = \left[f'(y) + \varphi(\Delta y)\right]\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

با گرفتن حد از (4) وقتی $\Delta x \to 0$، به دست می‌آوریم

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f'(y) + \varphi(\Delta y)\right]\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \qquad (5)$$

اما $\Delta x \to 0$ نتیجه می‌دهد که $\Delta y \to 0$، زیرا $y = g(x)$ در x پیوسته است (بنابر قضیهٔ ۱) و بنابراین $\Delta x \to 0$ نتیجه می‌دهد که، با توجه به (2)، $\varphi(\Delta y) \to 0$. این مطلب که $\varphi(0) = 0$ اکنون بسیار مهم است، زیرا ما نمی‌توانیم تضمین کنیم که $\Delta y \neq 0$. بنابراین (5) خواهد شد

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(y)}{\Delta x} = f'(y)g'(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad (6)$$

اما

$$\Delta f(y) = f(y+\Delta y) - f(y) = f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))$$
$$= f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))$$

و بنابراین طرف چپ (6) مساوی است با

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) \ (7)$$

زیرا $f(g(x))=\varphi(x)$. از مقایسه (6) و (7) به دست می‌آوریم $\varphi'(x)=f'(g(x))g'(x)$ و اثبات تمام است.

تبصره: روند قضیهٔ بالا را می‌توان برای بیشتر از دو تابع نیز به کار برد. به عنون مثال اگر g, h و f به ترتیب در x، $h(x)$ و $g(h(x))$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

$$\left(f\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)\left(g(h(x))\right)'=f'\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)g'\left(h\left(x\right)\right)h'\left(x\right).$$

مثال ۱۴: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید:

(i) $\varepsilon(x)=\sin(x^2)$ $\qquad$ (ii) $y=\sqrt{1-x^2}\,(|x|<1)$.

حل: (i) در اینجا $\varepsilon(x)=f(g(x))$، که در آن $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^2$.

لذا، بنابر قاعدهٔ زنجیری

$$\varepsilon'(x)=f'(g(x))g'(x)=\cos(g(x))(x^2)'=2x\cos(x^2).$$

(ii) فرض کنیم $y=f(g(x))$ که در آن $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=1-x^2$. در این صورت

$$y'=\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{g\left(x\right)}}\left(1-x^2\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

یعنی، $\quad y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

تبصره: گاهی قاعدهٔ زنجیری را به صورت سادهٔ زیر هم بیان می‌کنند:

فرض کنیم y تابعی از v به صورت $y=f(v)$، و v تابعی از x به صورت $v=g(x)$ باشد.

در این صورت y تابع از x به صورت $y=f(g(x))=\varphi(x)$ خواهد شد.

اکنون قاعدهٔ زنجیری ثابت می‌کند که $y'_x=y'_v\times v'_x$، که در آن y'_v مشتق y نسبت به v، v'_x مشتق v نسبت به x و y'_x نیز مشتق y نسبت به x است.

مثال۱۵: اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، مشتق توابع زیر را نسبت به x پیدا کنید:

(i) $\begin{cases} y=u^n, n\in Z \\ u=x^3+3x^2 \end{cases}$ $\qquad$ (ii) $\begin{cases} y=\sin u \\ u=\sin x \end{cases}$ $\qquad$ (iii) $\begin{cases} y=\cos u \\ u=\sqrt{x} \end{cases}$

حل: (i)

$$y'_x = y'_u \times u'_x = nu^{n-1}.\left(x^3+3x^2\right)'$$
$$= nu^{n-1}.\left(3x^2+6x\right)$$
$$= n\left(x^3+3x^2\right)^{n-1}.\left(3x^2+6x\right).$$

البته اگر n منفی باشد، شرط $u \neq 0$ نیز لازم است.

(ii)
$$y'_x = y'_u \times u'_x = \cos u \times u'_x = \cos u \times \left(\sin x\right)' = \cos u \times \cos x$$
$$= \cos x.\cos(\sin x).$$

(iii)
$$y'_x = y'_u \times u'_x = -\sin u \times \left(\sqrt{x}\right)' = -\sin u \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{x}\right).$$

دیدیم که اگر $f(x)=x^n$ ،$n\in Z$، آنگاه تابع $f(x)$ در هر نقطه a، که تابع در همسایگی آن تعریف شده باشد، دارای مشتق $f'(a)=na^{n-1}$ است.

همین مطلب درست است وقتی $f(x)=x^{\frac{1}{q}}$ ، که در آن $q\in N$. اکنون قضیهٔ بعد را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۶: فرض کنیم $f(x)=x^r$ که در آن r عددی گویا (منطق) است. در این صورت برای هر $a\neq 0$، که در همسایگی آن f تعریف شده باشد، تابع f مشتق‌پذیر بوده و

$$f'(a)=ra^{r-1}$$

اثبات: می‌توانیم بنویسیم $r=\frac{m}{n}$ که در آن $m\in Z, n\in N$.حال بنابر قاعدهٔ زنجیری و قضیهٔ ۴ (ب) ، داریم $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$. پس $f'(a)=\frac{1}{n}\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(ma^{m-1}\right)=\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-m}a^{m-1}=\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}$.

مثال ۱۶: مشتق توابع زیر را با استفاده از قاعدهٔ زنجیری محاسبه کنید:

(i) $y=\sin^3 x$ (ii) $y=\ln(\tan x)$ ($\ln$: لگاریتم طبیعی)

(iii) $y=5^{\cos x}$ (iv) $y=\ln\sin\left(x^3+1\right)$

(v) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ (vi) $y=\left(1+3x+5x^2\right)^4$

(vii) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $(viii)$ $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

حل: داریم

(i)
$$y'_x=\left(\sin^3 x\right)'_{\sin x}\left(\sin x\right)'_x = 3\sin^2 x\cos x$$

$$y'_x=\left(\ln(\tan x)\right)'_{\tan x}(\tan x)'_x=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2}{\sin 2x}\qquad (ii)$$

$$y'_x=\left(5^{\cos x}\right)'_{\cos x}(\cos x)'_x=5^{\cos x}\ln 5\times(-\sin x)=-5^{\cos x}\sin x\ln 5;\qquad (iii)$$

$$y'_x=\left[\ln\sin\left(x^3+1\right)\right]'_{\sin\left(x^3+1\right)}\left[\sin\left(x^3+1\right)\right]'_{x^3+1}\left[x^3+1\right]'_x\qquad (iv)$$

$$=\frac{1}{\sin\left(x^3+1\right)}.\cos\left(x^3+1\right)3x^2=3x^2\cot g\left(x^3+1\right);$$

$$y'_x=\left(arc\sin\sqrt{1-x^2}\right)_{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'_{1-x^2}\left(1-x^2\right)_{x_{(x\neq 0,\pm 1)}}\qquad (v)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x)=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'_x=\left[\left(1+3x+5x^2\right)^4\right]_{1+3x+5x^2}\times\left(1+3x+5x^2\right)'_x\qquad (vi)$$

$$=4\left(1+3x+5x^2\right)^3(3+10x)$$

(vii) با استفاده از قاعدهٔ زنجیری دیده می‌شود که

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$(viii)$داریم

$$y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}.\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1+x^2\right)}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left|1-x^2\right|\left(1+x^2\right)},$$

یعنی،

$$y'_x=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2} & ,|x|<1\\[2mm] \dfrac{-2}{1+x^2} & ,|x|>1\end{cases}$$

در $|x|=1$ مشتق وجود ندارد.

مثال ۱۷: مشتق‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید:

$(a)\quad y=f(x)=arc\sin(\cos x)\qquad\qquad (b)\quad y=f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

حل: (a) داریم

$$y'=f'(x)=\frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}=-\frac{\sin x}{|\sin x|}$$

بنابراین، در نقاطی که $\sin x>0$، به دست می‌آوریم $y'=-1$ و در نقاطی که $\sin x<0$ به دست

می‌آوریم $y'=1$. در نقاطی که برای آنها $\sin x=0$، یعنی در نقاط $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ تابع، هر چند که پیوسته است، مشتق‌پذیر نیست.

(b)حوزهٔ تعریف این تابع فاصلهٔ $-1\le x\le 1$ است. داریم

$$y'=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

که در آن $x\neq 0$ و $x\neq\pm1$. وقتی $x\to 1^-$ یا $x\to -1^+$ به دست می‌آوریم $y'\to+\infty$. حال امکان وجود مشتق در $x=0$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-(\Delta x)^2}}\times\sqrt{1+\sqrt{1-(\Delta x)^2}}}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-(\Delta x)^2}}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1-\left(1-(\Delta x)^2\right)}}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-(\Delta x)^2}}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-(\Delta x)^2}}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt2},\Delta x\to 0^+\\[2mm] \dfrac{-1}{\sqrt2},\Delta x\to 0^-\end{cases}$$

بنابراین $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ ، و مشتق تابع در $x=0$ وجود ندارد، هر چند که تابع در این نقطه پیوسته است.

۳ . ۵ مشتق تابع ضمنی

در ریاضیات و کاربردهای آن گاهی اوقات با مسایلی برخورد می‌کنیم که در آنها متغیری مانند y به عنوان تابعی از متغیر مستقل x با یک معادلهٔ تابعی به صورت (1) $F(x,y)=0$ داده شده است. در چنین وضعیتی می‌گوییم که y به عنوان تابعی از متغیر مستقل x به صورت ضمنی مشخص شده است. به عنوان مثال تابع $y=-\sqrt{1-x^2}$، که در آن $-1\le x\le 1$، را می‌توان به صورت ضمنی با معادلهٔ تابعی (2) $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ مشخص کرد. سؤال طبیعی در اینجا یافتن شرایطی است که تحت آنها معادله (۱) دارای یک پاسخ منحصر به فرد نسبت به y باشد، یعنی تابع صریح

منحصر به فردی مانند $y=f(x)$ که در (1) صدق می‌کند. سؤالهای اساسی‌تر در مورد شرایطی است که تحت آنها این تابع صریح پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. اینها سؤالهای ساده‌ای نیستند و برای پاسخ به آنها نیازمند به دانسته‌های وسیع‌تری در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشیم. بنابراین، در حالت کلی معادلهٔ تابعی (2) نه تنها تابع صریح $y=-\sqrt{1-x^2}$ بلکه همچنین تابع صریح $y=\sqrt{1-x^2}$ را معین می‌کند.

شکل ۳ . ۷

می‌بینیم که معادلهٔ (2) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد را به دست می‌دهد و از روی آن دو تابع صریح $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ و $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ را پیدا می‌کنیم.

اکنون فرض کنیم تابع مشتق‌پذیر y از متغیر مستقل x به صورت ضمنی با $F(x,y)=0$ داده شده باشد. می‌خواهیم مشتق y نسبت به x، یعنی y' را پیدا کنیم. به سه مثال زیر توجه کنید:

$$y\sin x-x^2+5=0 \qquad (a)$$

$$x^2+y^2-1=0 \qquad (b)$$

$$\sin(xy)+y^2+x^y-\arctan y-x^4+2=0 \qquad (c)$$

از (a) تابع صریح $y=\dfrac{x^2-5}{\sin x}$ را به دست می‌آوریم.

از (b) دو تابع صریح $y=-\sqrt{1-x^2}$ و $y=\sqrt{1-x^2}$ را به دست می‌آوریم. از روی (c) نمی‌توانیم y را بر حسب x به صورت تابعی صریح به دست آوریم. با وجود این در هر سه حالت بنابر فرض می‌دانیم که y تابعی مشتق‌پذیر از x است. حال مسأله این است که چگونه می‌توانیم فقط با استفاده از معادلهٔ $F(x,y)=0$ و بدون نیاز به یافتن شکل صریح $y=f(x)$ مشتق تابع y را نسبت به متغیر x پیدا کنیم. به این مسأله به صورت زیر پاسخ می‌دهیم:

از طرفین رابطهٔ $F(x,y)=0$ نسبت به مشتق می‌گیریم و از قاعدهٔ زنجیری در مورد مشتق استفاده می‌کنیم. یعنی همواره در نظر داریم که y تابعی از x است. معادلهٔ حاصل از مشتق‌گیری را برای y' حل می‌کنیم و بدین ترتیب، مشتق تابع y، یعنی y'، به دست می‌آید. به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال۱۸: اگر تابع y از متغیر x به صورت ضمنی با معادلات تابعی زیر داده شده باشد، مطلوب است محاسبه y':

$$\sin(xy)+y^2+x^y-\arctan y-x^4+2=0 \quad (i)$$

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\,(ii) \qquad x+\sqrt{xy}+y=a\,(iii)$$

$$e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0\,(iv) \qquad x^3+\ln y-x^2e^y=0\,(v)$$

$$x^4+y^4=x^2y^2\,(vi) \qquad \sin(xy)+\cos(xy)=\tan(x+y)\,(vii)$$

حل: (i)

$$\cos(xy)\times(y+xy')+2yy'+yx^{y-1}+x^yy'\ln x-\frac{y'}{1+y^2}-4x^3=0$$

$$y'\left(x\cos(xy)+2y+x^y\ln x-\frac{1}{1+y^2}\right)=-y\cos(xy)-yx^{y-1}+4x^3$$

که از آن به دست می‌آید

$$y'=\frac{4x^3-yx^{y-1}-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+2y+x^y\ln x-\dfrac{1}{1+y^2}}.$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0\Rightarrow y^{-1/3}y'=-x^{-1/3} \qquad (ii)$$

$$\Rightarrow\quad y'=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}.$$

$$1+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}(y+xy')+y'=0 \qquad (iii)$$

$$y'\left(\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}x+1\right)=-1-\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}y$$

$$y'\left(\frac{x^{1/2}}{2y^{1/2}}+1\right)=-1-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}+1\right)=-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\Rightarrow y'=-\frac{2+\sqrt{y/x}}{2+\sqrt{x/y}}.$$

$$e^x\sin y+e^x\cos y\times y'-\left(-e^{-y}y'\cos x-e^{-y}\sin x\right)=0 \qquad (iv)$$

$$y'(e^x\cos y+e^{-y}\cos x)=-e^x\sin y-e^{-y}\sin x$$

$$y'=-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}.$$

$$3x^2+\frac{1}{y}\times y'-2xe^y-x^2e^yy'=0 \qquad (v)$$

$$y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2 \Rightarrow y'=\frac{2xe^y-3x^2}{\frac{1}{y}-x^2e^y}.$$

$$4x^3+4y^3y'=2xy^2+2x^2yy' \qquad (vi)$$

$$y'\left(4y^3-2x^2y\right)=2xy^2-4x^3 \Rightarrow y'=\frac{2xy^2-4x^3}{4y^3-2x^2y}.$$

(vii)

$$\cos(xy)\times(y+xy')-\sin(xy)\times(y+xy')=\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y')$$

$$y'\left(x\cos(xy)-x\sin(xy)\right)-\frac{1}{\cos^2(x+y)}=-y\cos(xy)+y\sin(xy)+\frac{1}{\cos^2(x+y)}$$

$$y'=\frac{y\left(\sin(xy)-\cos(xy)\right)+\frac{1}{\cos^2(x+y)}}{x\left(\cos(xy)-\sin(xy)\right)-\frac{1}{\cos^2(x+y)}}.$$

توجه: بار دیگر استفادهٔ صحیح از قاعدهٔ زنجیری را یادآوری می‌کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم از y^2 نسبت به x مشتق بگیریم، دقت می‌کنیم که y^2 تابعی از y است که y تابعی از x است، پس

$$\left(y^2\right)'_x=\left(y^2\right)'_y\times y'_x=2y.y'$$

از این مطلب در تمامی مشتقات مثال بالا استفاده شده است.

۳ . ۶ مشتق تابع معکوس

قضیهٔ زیر رابطه‌ای بین مشتق یک تابع و مشتق تابع معکوس آن، در صورت وجود تابع معکوس، بیان می‌کند. در اینجا ازمطالب قسمت ۷ در فصل دوم استفاده می‌کنیم. به ویژه توجه می‌کنیم که شرط وجود f^{-1} آن است که f تابعی یک به یک باشد و می‌دانیم که اگر تابعی یکنوای اکید باشد، یک به یک است.

قضیهٔ ۷ (مشتق تابع معکوس): فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و یکنوای اکید باشد و فرض کنیم، $y=f(x)$. اگر f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $f'(x)\neq 0$ ، آنگاه مشتق تابع معکوس f^{-1} ، که با $x=f^{-1}(y)$ تعریف می‌شود، به صورت $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ داده شده است.

مثال۱۹: (i) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ داده شده است. تابع معکوس f^{-1} را در صورت وجود پیدا کنید و سپس درستی قضیهٔ ۷ را در مورد آن تحقیق کنید.

(ii) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3+x$ داده شده است. وجود تابع معکوس را بررسی کنید و مشتق تابع معکوس را بیابید.

حل: (i) نشان می‌دهیم که تابع f یک به یک است. فرض کنیم $x_1,x_2\neq 1$ و $f(x_1)=f(x_2)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{2x_1+3}{x_1-1}=\frac{2x_2+3}{x_2-1}\Leftrightarrow\\
&(2x_1+3)(x_2-1)=(x_1-1)(2x_2+3)\Leftrightarrow\\
&2x_1x_2-2x_1+3x_2-3=2x_1x_2+3x_1-2x_2-3\Leftrightarrow 5x_2=5x_1\Leftrightarrow\\
&x_1=x_2\ .
\end{aligned}$$

چون f یک به یک است، لذا تابع معکوس f^{-1} موجود است. برای یافتن f^{-1} ، فرض می‌کنیم $y=f(x)$ و این معادله را برای x حل کرده و به دست می‌آوریم $x=f^{-1}(y)$.

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
&y=\frac{2x+3}{x-1}\Rightarrow xy-y=2x+3\Rightarrow x(y-2)=y+3\\
&\Rightarrow x=\frac{y+3}{y-2}\,.
\end{aligned}$$

پس $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{y-2}$. دیده می‌شود که حوزهٔ تعریف تابع f مجموعهٔ $R-\{1\}$ و حوزهٔ تعریف تابع f^{-1} ، مجموعهٔ $R-\{2\}$ است.

اکنون از $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ نتیجه می‌شود که: $y'=f'(x)=-\dfrac{5}{(x-1)^2}$. چون $f'(x)$ برای هر $x\neq 1$ وجود دارد، پس f برای هر $x\neq 1$ مشتق‌پذیر و بنابراین پیوسته است. به علاوه برای هر $x\neq 1$، داریم $f'(x)<0$ و بنابراین برای هر $x\neq 1$، تابع f نزولی است (این مطلب را در فصل چهارم ثابت می‌کنیم). بنابراین شرایط قضیهٔ ۷ در هر بازه‌ای مانند $[a,b]$ که شامل عدد 1 نباشد، برقرار است.

در بالا دیدیم که $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{y-2}$. حال مشتق x نسبت به y را از این معادله محاسبه می‌کنیم، $\left(f^{-1}\right)'(y)=-\dfrac{5}{(y-2)^2}$. اگر در معادلهٔ بالا فرض کنیم $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$، به دست می‌آوریم

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=-\frac{5}{\left(\dfrac{2x+3}{x-1}-2\right)^2}=-\frac{5(x-1)^2}{(2x+3-2x+2)^2}$$

$$=-\frac{5}{25}(x-1)^2=\frac{-1}{5}(x-1)^2=\frac{1}{f'(x)}.$$

(ii) چون $f(x)=x^3+x$، پس $f'(x)=3x^2+1$. بنابراین برای تمام اعداد حقیقی، $f'(x)>0$. چون

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

پس تابع $f(x)$ بر R صعودی اکید است. به سادگی دیده می‌شود که شرایط قضیهٔ ۷ برقرار است و بنابراین، f دارای تابع معکوس f^{-1} است. فرض کنیم $y=f(x)$ و در این صورت $x=f^{-1}(y)$. پس بنابر قضیهٔ ۷ داریم

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{3x^2+1}.$$

یکی از فواید جالب قضیهٔ ۷ این است که ما را قادر می‌سازد مشتق f^{-1} را، حتی در حالاتی که به دست آوردن شکلی صریح برای تابع f^{-1} غیر ممکن است، محاسبه نماییم.

۳ . ۷ مشتقات مراتب بالاتر

فرض کنیم تابع $f(x)$ روی بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد، یعنی $I\subseteq D_{f'}$، و فرض کنیم $a\in I$. حال، $f'(x)$ خود تابعی از x است و به عنوان یک تابع می‌توان وجود یا عدم وجود مشتق تابع $f'(x)$ را در $x=a$ بررسی کرد. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$ موجود باشد، می‌گوییم مشتق دوم تابع $f(x)$ در a موجود است و آن را با $\left(f'\right)'(a)=f''(a)$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که به ازای هر $x\in I$، $f''(x)$ موجود باشد می‌گوییم تابع $f(x)$ در I مشتق مرتبه دوم دارد.

به طریق مشابه، اگر $f''(x)$ در I مشتق‌پذیر باشد، تابع $f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$ را مشتق سوم تابع $f(x)$ می‌نامیم و آن را با $f^{(3)}(x)$ نیز نشان می‌دهیم. به طور کلی مشتق nام تابع $f(x)$، که آن را با $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهیم، به صورت

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

تعریف می‌شود، البته با فرض آنکه $f^{(n-1)}(x)$ در I مشتق‌پذیر باشد. ما همچنین $f^{(0)}(x)=f(x)$ تعریف می‌کنیم، یعنی نتیجهٔ مشتق نگرفتن از $f(x)$ خود تابع $f(x)$ است.

مثال۲۰: مشتقات مراتب مختلف توابع زیر را حساب کنید:

(i) $f(x)=x^n$ ، که در آن $n\in N$.

(ii) $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ ، که در آن $a_n\neq 0$ و $n\in N$.

(iii) $f(x)=\sin x$.

حل: (i) داریم

$$f'(x)=nx^{n-1},\ f''(x)=x(x-1)x^{n-2},....,$$
$$f^{(k)}(x)=n(n-1)...(x-k+1)x^{n-k},....,$$
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)...2.1=n!,$$
$$f^{(n+1)}(x)=\ f^{(n+2)}(x)=....=0$$

یعنی از مرتبهٔ $(n+1)$ام به بعد کلیهٔ مشتقات تابع $f(x)$ برابر با صفر هستند.

(ii) داریم

$$P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}$$
$$P''(x)=2a_2+6a_3x+...+n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$P'''(x)=6a_3+24a_4x+...+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

....

$$P^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\times....\times 2\times 1a_n=n!a_n$$

و $P^{(n+1)}(x)=P^{(n+2)}(x)=...=0$ ، یعنی برای هر $k>n$ ، $p^{(k)}(x)=0$.

(iii) داریم

$$f'(x)=\cos x=\sin x\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

در حقیقت می‌توان نشان داد که برای هر عدد صحیح و نامنفی k

$$f^{(4k)}(x)=\sin x,\ f^{(4k+1)}(x)=\cos x\,.$$
$$f^{(4k+2)}(x)=-\sin x,\ f^{(4k+3)}(x)=-\cos x$$

تعریف: تابع $f(x)$ را **بینهایت مشتق‌پذیر** در نقطهٔ x می‌نامیم، در صورتی که دارای مشتقات از تمامی مراتب در x باشد (یعنی، در صورتی که $f^{(n)}(x)$ برای هر $n=1,2,.......$ وجود داشته باشد) و $f(x)$ را **بینهایت مشتق‌پذیر** در بازهٔ I می‌نامیم، در صورتی که در هر نقطه از I بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد.

پس می‌توان گفت که بنابر مثال قبل، توابع $f(x)=x^n$ ، $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ و $f(x)=\sin x$ بینهایت بار مشتق‌پذیر هستند.

مثال۲۱: تابع $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ x^3 & ,x>0\end{cases}$ را در نظر بگیریم. به سادگی دیده می‌شود که این تابع دارای مشتق مرتبهٔ اول

$$f'(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ 3x^2 & ,x>0\end{cases}$$

و مشتق مرتبهٔ دوم

$$f''(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ 6x & ,x>0\end{cases}$$

در بازهٔ $(-1,1)$ است. حال مشتق مرتبهٔ سوم تابع را در بازهٔ $(-1,1)$ بررسی می‌کنیم.

برای هر $x<0$ ، داریم $f''(x)=0$ و بنابراین $f'''(x)=0$.

برای هر $x>0$ ، داریم $f''(x)=6x$ و بنابراین $f'''(x)=6$

حال مشتق تابع $f''(x)$ در $x=0$ را بررسی می‌کنیم

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f''(0+\Delta x)-f''(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{6\Delta x}{\Delta x}=6$$

و

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f''(0+\Delta x)-f''(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{0}{\Delta x}=0$$

چون $f''_+(0)\ne f''_-(0)$ ، بنابراین تابع $f''(x)$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. لذا نمی‌توان ادعا کرد که تابع $f''(x)$ بر بازهٔ $(-1,1)$ مشتق‌پذیر است.

به طور کلی می‌توان ثابت کرد که برای هر $n\in N$، تابع $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ x^n, x>0\end{cases}$ در هر بازهٔ باز شامل صفر دارای مشتقات تا مرتبه $(n-1)$ام است، ولی در کل این بازه دارای مشتق مرتبه nام نیست (این مطلب را به عنوان تمرین ثابت کنید).

نکته: برای آنکه تابعی مانند f بر بازه‌ای مانند I دارای مشتق مرتبه nام باشد، لازم است که $f^{(n-1)}$ روی I پیوسته باشد. از این مطلب در مثال بعد استفاده خواهیم کرد.

مثال۲۲: ثابت کنید که تابع
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$
در فاصلهٔ $(-\infty,+\infty)$ مشتق‌پذیر است اما در $x=0$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم نمی‌باشد.

حل: اگر $x\neq 0$، آنگاه $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ و بنابراین با استفاده از قوانین مشتق داریم
$$f'(x)=\left(x^2\right)'\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\times\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$
پس $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

حال مشتق تابع در $x=0$ را بررسی می‌کنیم، داریم
$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}.$$
اما داریم
$$0\leq\left|\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right|=|\Delta x|\left|\sin\frac{1}{\Delta x}\right|\leq|\Delta x|$$
بنابراین $0\leq\left|\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right|\leq|\Delta x|$ و چون $\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$، پس با استفاده از قضیهٔ فشردگی، $\lim_{\Delta x\to 0}\left|\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right|=0$ و در نتیجه $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0$. لذا $f'(0)=0$، و می‌توانیم بنویسیم
$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$
یعنی تابع $f'(x)$ بر $(-\infty,+\infty)$ موجود است.

حال برای اثبات اینکه $f(x)$ در $x=0$ مشتق مرتبهٔ دوم ندارد، ثابت میکنیم که $f'(x)$ در $x=0$ مشتق مرتبهٔ اول ندارد. و برای اثبات اینکه $f'(x)$ در $x=0$ مشتق مرتبهٔ اول ندارد، کافی است ثابت کنیم که $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست (زیرا اگر تابع $f'(x)$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته هم خواهد بود).

اکنون با استدلالی مشابه مثال ۵ از فصل دوم می‌توان نشان داد که $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ موجود نیست و به سادگی دیده می‌شودکه $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}=0$.

حال تابع $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ به صورت تفاضل دو تابع است که یکی در 0 حد ندارد و دیگری حد دارد. بنابراین $\lim_{x\to 0} f'(x)$ موجود نیست و لذا تابع $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که $f'(x)$ در $x=0$ مشتق ندارد. بنابراین $f(x)$ در $x=0$ مشتق مرتبهٔ دوم ندارد.

مثال ۲۳: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دارای مشتقات متوالی تا مرتبهٔ سوم باشند، مطلوب است محاسبهٔ $(f(x)g(x))'''$.

حل: داریم

$$\begin{aligned}(fg)''' &= \left(\left(fg\right)'\right)'' = \left(f'g+fg'\right)'' = \left(\left(f'g+fg'\right)'\right)' \\ &= \left(f''g+f'g'+f'g'+fg''\right)' = \left(f''g+2f'g'+fg''\right)' \\ &= f'''g+f''g'+2f''g'+2f'g''+f'g''+fg''' \\ &= f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''\end{aligned}$$

یا

$$\left(f(x)g(x)\right)''' = f'''(x)g(x)+3f''(x)g'(x)+3f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x)$$

دیده می‌شود که ضرایب دو جمله‌ای $(a+b)^3$، یعنی

$$\binom{3}{0}=1,\binom{3}{1}=3,\binom{3}{2}=3,\binom{3}{3}=1$$

در اینجا به کار رفته است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این مطلب تصادفی نیست.

قضیهٔ ۸ (قاعدهٔ لایبنیتز): فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ دارای مشتقات متوالی تا مرتبه nام باشند. در این صورت مشتق nام تابع $f(x)g(x)$ با رابطهٔ

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f^{(n-j)}(x)g^{j}(x) \quad (1)$$

داده شده است.

اثبات: می‌دانیم که تعداد ترکیب‌های r شیئی از n شیئی با دستور زیر داده شده است:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

حال قضیهٔ را به استقراء ثابت می‌کنیم. بدیهی است که رابطهٔ (1) به ازای $n=1$ برقرار است، زیرا
$(fg)' = \binom{1}{0} f'g + \binom{1}{1} fg' + = f'g + fg'$.

فرض کنیم که (1) به ازای $n=h$ برقرار باشد، یعنی

$$(fg)^{(h)} = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{j} f^{(h-j)}(x) g^{(j)}(x)$$: فرض استقراء

ثابت می‌کنیم که (1) به ازای $n=h+1$ نیز برقرار است، یعنی

$$(fg)^{(h+1)} = \sum_{i=0}^{h+1} \binom{h+1}{j} f^{(h+1-j)}(x) g^{(j)}(x)$$: حکم استقراء

می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
(fg)^{(h+1)} &= \left[\sum_{i=0}^{h} \binom{h}{j} f^{(h-j)} g^{(j)} \right]' \\
&= \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} f^{(h+1-j)} g^{(j)} + \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} f^{(h-j)} g^{(j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} f^{(h+1-j)} g^{(j)} + \sum_{j'=1}^{h+1} \binom{h}{j'-1} f^{(h+1-j')} g(j')
\end{aligned}$$

که در آن $j' = j+1$. با حذف علامت $'$ (پریم) و دسته‌بندی مجدد جملات ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
(fg)^{(h+1)} &= \binom{h}{0} f^{(h+1)} g + \sum_{j=1}^{h} \left[\binom{h}{j} + \binom{h}{j-1} \right] f^{(h+1-j)} g^{(j)} + \binom{h}{h} fg^{(h+1)} \\
&= \binom{h+1}{0} f^{(h+1)} g + \sum_{j=1}^{h} \left[\binom{h}{j} + \binom{h}{j-1} \right] f^{(h+1-j)} g^{(j)} + \binom{h+1}{h+1} fg^{(h+1)} \qquad (2)
\end{aligned}$$

زیرا $\binom{h}{0} = \binom{h+1}{0} = 1$ و $\binom{h}{h} = \binom{h+1}{h+1} = 1$.

اما از آنالیز ترکیبی می‌دانیم که　　$(3) \qquad \binom{h}{j} + \binom{h}{j-1} = \binom{h+1}{j}$.

با قرار دادن (3) در (2) به دست می‌آوریم

$$(fg)^{(h+1)} = \binom{h+1}{0} f^{(h+1)} g + \sum_{j=0}^{h} \binom{h+1}{j} f^{(h+1-j)} g^{(j)} + \binom{h+1}{h+1} fg^{(h+1)} = \sum_{j=0}^{h+1} \binom{h+1}{j} f^{(h+1-j)} g^{(j)}$$

یعنی، (1) برای $n=h+1$ برقرار است. اکنون قضیه از اصل استقراری ریاضی نتیجه می‌شود.

مثال۲۴: (i) مشتق دهم تابع $f(x) = x^4 \sin x$ را پیدا کنید.

(ii) مشتق nام تابع $y(x) = e^{ax} x^2$ را پیدا کنید.

حل: (i) بنابر قضیهٔ ۸ داریم

$$\left(x^4\sin x\right)^{(10)}=\binom{10}{0}(\sin x)^{(10)}x^4+\binom{10}{1}(\sin x)^{(9)}\left(x^4\right)'$$
$$+\binom{10}{2}(\sin x)^{(8)}\left(x^4\right)''+\binom{10}{3}(\sin x)^{(7)}\left(x^4\right)'''$$
$$+\binom{10}{4}(\sin x)^{(6)}\left(x^4\right)^{(4)}+\dots+\binom{10}{10}(\sin x)\left(x^4\right)^{10}$$

اما $\left(x^4\right)'=4x^3,\left(x^4\right)''=12x^2,\left(x^4\right)'''=24x,\left(x^4\right)^{(4)}=24$ و برای $n>4$، داریم $\left(x^4\right)^{(n)}=0$. همچنین

$$(\sin x)^{(6)}=-\sin x,(\sin x)^{(7)}=-\cos x,(\sin x)^{(8)}=\sin x,$$
$$(\sin x)^{(9)}=\cos x,(\sin x)^{(10)}=-\sin x.$$

بالاخره

$$\binom{10}{0}=1,\binom{10}{1}=10,\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2!}=45$$
$$\binom{10}{3}=\frac{10\times 9\times 8}{3!}=120,\binom{10}{4}=\frac{10\times 9\times 8\times 7}{4!}=210.$$

نتیجه می‌شود که

$$\left(x^4\sin x\right)^{(10)}=-x^4\sin x+40x^3\cos x+540x^2\sin x-2880x\cos x+5040\sin x.$$

(ii) فرض کنیم $f(x)=e^{ax}$ و $g(x)=x^2$. داریم

$$\begin{array}{ll} f(x)=e^{ax} & g(x)=x^2 \\ f'(x)=ae^{ax} & g'(x)=2x \\ f''(x)=a^2e^{ax} & g''(x)=2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x)=a^ne^{ax} & g'''(x)=g^{(4)}(x)=\dots=0. \end{array}$$

بنابراین با استفاده از قضیهٔ ۸ به دست می‌آوریم

$$(y(x))^{(n)}=a^ne^{ax}x^2+na^{n-1}e^{ax}.2x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}e^{ax}.2$$

یا

$$(y(x))^{(n)}=e^{ax}\left[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}\right].$$

مثال۲۵: (i) اگر $f(x)=\sin(\cos x)$ پیدا کنید $f''(x)$ را.

(ii) پیدا کنید y'' را هرگاه داشته باشیم $y^2=2px$

حل: (i) با دو بار استفاده از قاعدهٔ زنجیری داریم

$$f''(x)=(\sin(\cos x))''=\left((\sin(\cos x))'\right)'=(-\cos(\cos x)\times\sin x)'$$
$$=-(\cos(\cos x))'\sin x-\cos(\cos x)\times\cos x$$
$$=-\sin x(\cos x)\times\sin^2 x-\cos(\cos x)\times\cos x\ .$$

(ii)از طرفین معادلهٔ $y^2=2px$ نسبت به x مشتق می‌گیریم و به این مطلب توجه داریم که y تابعی از x است

$$2yy'=2p\Rightarrow yy'=p.$$

اکنون از معادله اخیر نسبت به x مشتق بگیریم، $y'^2+yy''=0$.

از حل دستگاه $\begin{cases}yy'=p\\ y'^2+yy''=0\end{cases}$ برای y' و y'' به دست می‌آوریم

$$y'=\frac{p}{y},\ y''=-\frac{y'^2}{y}$$

که از آنها نتیجه می‌شود $y''=-\frac{P^2}{y^3}$.

مثال ۲۶: مشتق nام هر یک از توابع زیر را پیدا کنید:

(i) $\quad y=\frac{1}{1-2x}$ $\qquad$ (ii) $\quad y=\frac{x}{x^2-1}$.

حل: (i)برای شروع y', y'', y''' را حساب می‌کنیم:

$$y'=\frac{+2}{(1-2x)^2},\ y''=\frac{-2(1-2x)(-2)(+2)}{(1-2x)^2}=\frac{4\times 2}{(1-2x)^3},$$
$$y'''=\frac{-2(1-2x)^2(-2)\times 8}{(1-2x)^6}=\frac{8\times 6}{(1-2x)^4}.$$

اکنون حدس می‌زنیم که مشتق nام به صورت $y^{(n)}=\frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}$ باشد، زیرا می‌بینیم که y', y'', y''' با این دستور سازگار هستند. در مرحلهٔ بعد این دستور را به استقراء ثابت می‌کنیم

$$n=1:\ y^{(1)}=y'=\frac{2^1\times 1!}{(1-2x)^2}=\frac{2}{(1-2x)^2}$$

که می‌دانیم درست است. فرض کنیم دستور برای $n=h$ برقرار باشد، یعنی

فرض استقراء : $\qquad y^{(h)}=\frac{2^h(h)!}{(1-2x)^{h+1}}$

ثابت می‌کنیم که این دستور برای $n=h+1$ نیز برقرار است، یعنی

حکم استقراء : $y^{(h+1)}=\dfrac{2^{h+1}(h+1)!}{(1-2x)^{h+2}}$

اما مطابق قوانین مشتق می‌دانیم که $y^{(h+1)}=\left(y^{(h)}\right)'$، و با استفاده از فرض استقراء

$$y^{(h+1)}=\left(\frac{2^h h!}{(1-2x)^{h+1}}\right)'.$$

حال $y^{(h+1)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y^{(h+1)}=-\frac{(h+1)(1-2x)^h(-2)\times 2^h h!}{(1-2x)^{2h+2}}=\frac{(h+1)h!\times 2\times 2^h}{(1-2x)^{h+2}}$$

یعنی، $y^{(h+1)}=\dfrac{2^{h+1}(h+1)!}{(1-2x)^{h+2}}$. بنابراین با استفاده از اصل استقرای ریاضی دیده می‌شود که دستور داده شده برای $y^{(n)}$ درست است.

(ii)ابتدا کسر $\dfrac{x}{x^2-1}$ را به حاصلجمع دو کسر ساده تجزیه می‌کنیم. داریم

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

و می‌نویسیم $\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}$، که در آن B, A ثابت‌های مجهول هستند و بایستی آنها را پیدا کنیم. با ضرب طرفین معادلهٔ بالا در $(x+1)(x-1)$ داریم

$$x=A(x+1)+B(x-1).$$

$x=1$ قرار داده و بدست می‌آوریم $B=\dfrac{1}{2}$، و نیز $x=-1$ قرار داده پیدا می‌کنیم $A=\dfrac{1}{2}$، بنابراین

$$y=\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right).$$

اکنون اگر فرض کنیم $y_1=\dfrac{1}{x-1}$ و $y_2=\dfrac{1}{x+1}$، آنگاه داریم

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

و به سادگی دیده می‌شود که $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left(y_1^{(n)}+y_2^{(n)}\right)$. بنابراین کافی است $y_1^{(n)}$ و $y_2^{(n)}$ را محاسبه کنیم. به عنوان مثال دستوری برای $y_1^{(n)}$ به دست می‌آوریم. داریم

$$y_1'=\frac{-1}{(x-1)^2},\ y_1''=\frac{-2(x-1)(-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y_1'''=\frac{-3(x-1)^2\times 2}{(x-1)^6}=\frac{-6}{(x-1)^4}.$$

حدس می‌زنیم که $y_1^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ و آن را به استقراء ثابت می‌کنیم.

$$n=1: y_1^{(n)}=y_1'=\frac{(-1)^1 1!}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

که می‌دانیم درست است. فرض کنیم دستور برای $n=h$ برقرار باشد، یعنی

فرض استقراء: $$y_1^{(h)}=\frac{(-1)^h h!}{(x-1)^{h+1}}$$

ثابت می‌کنیم که دستور برای $n=h+1$ نیز برقرار است، یعنی

حکم اسقراء: $$y_1^{(h+1)}=\frac{(-1)^{h+1}(h+1)!}{(x-1)^{h+2}}$$

اما می‌دانیم $y_1^{(h+1)}=\left(y_1^{(h)}\right)'$ و با استفاده از فرض استقراء داریم

$$y_1^{(h+1)}=\left(\frac{(-1)^h h!}{(x-1)^{h+1}}\right)'=\frac{-(h+1)(x-1)^h(-1)^h h!}{(x-1)^{2h+2}}$$

و یا $y_1^{(h+1)}=\dfrac{(-1)^{h+1}(h+1)!}{(x-1)^{h+2}}$. پس بنابر اصل استقرای ریاضی دستور داده شده برای $y_1^{(n)}$ درست است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $y_2^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. بنابراین

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

و یا

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!\left((x+1)^{n+1}+(x-1)^{n+1}\right)}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

تبصره: با مفروضات قضیهٔ ۷ (مشتق تابع معکوس) داریم $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$، یعنی، $x_y'=\dfrac{1}{y_x'}$.

اکنون می‌توانیم نشان دهیم که $x_y''=-\dfrac{y_x''}{(y_x')^3}$ که در آن $x_y''=\left(x_y'\right)'_y$ و $y_x''=\left(y_x'\right)'_x$. زیرا اگر از طرفین رابطهٔ $x_y'=\dfrac{1}{y_x'}$ نسبت به y مشتق بگیریم، داریم

$$\begin{aligned}x_y''&=\left(\frac{1}{y_x'}\right)'_y=\left(\frac{1}{(y_x')}\right)'_x\times x_y'\\&=\left(\frac{-y_x''}{y_x'^2}\right)\times\frac{1}{y_x'}=\frac{-y_x''}{(y_x')^3}.\end{aligned}$$

به عنوان مثال برای تابع $y=x+e^x$ داریم $y'_x=1+e^x$ و $y''_x=e^x$. بنابراین $x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+e^x}$ و $x''_y=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^3}$.

۳ . ۸ مشتق توابع لگاریتمی و نمائی

در این بخش به بررسی مشتق توابع لگاریتمی، قوای حقیقی و حالت کلی توابع نمائی می‌پردازیم و از دانسته‌های قبلی استفاده می‌نمائیم. به ویژه، توجه می‌کنیم که تابع لگاریتمی در هر نقطه از حوزه تعریف خود پیوسته است و لذا می‌توان در حدگیری جای آن را با علامت حد عوض نمود.

قضیه ۹: مشتق تابع $\log_a x$ عبارت است از $\frac{1}{x}\log_a e$، یعنی، اگر $y=\log_a x$، آنگاه $y'=\frac{1}{x}\log_a e$.

اثبات. اگر Δy نمو تابع $y=\log_a x$ متناظر به نمو Δx از متغیر x باشد، آنگاه

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

و لذا $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

با ضرب و تقسیم طرف راست آخرین معادله در x داریم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

کمیت $\frac{\Delta x}{x}$ را با α نشان می‌دهیم. بدیهی است که برای x مفروض، $\alpha\to0$ هرگاه $\Delta x\to0$ ودر نتیجه،

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

اما، همانطور که در فصل دوم نشان دادیم، $\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$. بنابراین

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a \left(\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$
$$= \frac{1}{x} \log_a e$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت شده است.

تبصره: اگر $a = e$ آنگاه $\log_e a = \ln a = \ln e = 1$ و لذا اگر $y = \ln x$، آنگاه $y' = \frac{1}{x}$.

قضیه ۱۰: مشتق تابع x^n، که در آن n عددی حقیقی است، برابر با nx^{n-1} است، یعنی،
اگر $y = x^n$، آنگاه $y' = nx^{n-1}$.

اثبات. فرض کنیم $x > 0$. با لگاریتم گرفتن از تابع $y = x^n$ بدست می‌آوریم

$$\ln y = n \ln x \qquad (1)$$

از طرفین معادله (1) نسبت به x مشتق گرفته و به این مطلب توجه داریم که $\ln y$ تابعی از y و y تابعی از x است:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad y' = yn\frac{1}{x}$$

در این معادله مقدار $y = x^n$ قرار داده و بالاخره بدست می‌آوریم

$$y' = nx^{n-1}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این فرمول برای $x < 0$ نیز برقرار است به شرط آنکه x^n با معنی باشد.

قضیه ۱۱: مشتق تابع a^x، که در آن $x > 0$، عبارت است از $a^x \ln a$، یعنی
اگر $y = a^x$، آنگاه $y' = a^x \ln a$.

اثبات. از معادله $y = a^x$ لگاریتم گرفته و بدست می‌آوریم

$$\ln y = x \ln a$$

حال با توجه به آنکه y تابعی از x است از طرفین معادله بالا نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y} = \ln a, \quad y' = y \ln a$$

و با قرار دادن $y = a^x$ داریم $y = a^x \ln a$.
اگر مبنای a برابر با e گرفته شود، آنگاه $\ln e = 1$ و فرمول زیر را بدست می‌آوریم

$$y = e^x \quad \text{و} \quad y' = e^x$$

یک تابع مرکب نمایی تابعی است که در آن پایه و نما هر دو توابعی از x هستند، به عنوان مثال، $(\sin x)^{x^2}$, x^{tgx}، x^x و $(lnx)^x$و در حالت کلی هر تابعی به شکل $y=[u(x)]^{v(x)}=u^v$ یک تابع مرکب نمایی است.

قضیه ۱۲: اگر $y=u^v$ آنگاه $y'=vu^{v-1}u'+u^v v' lnu$

اثبات. ازطرفین معادله $y=u^v$ لگاریتم می‌گیریم. و داریم.

$$lny=v\, lnu \qquad (2)$$

از دو طرف معادله (2) نسبت به x مشتق گرفته و توجه داریم که y تابعی از x است:

$$\frac{y'}{y}=v\frac{1}{u}u'+v' lnu$$

که از آنجا

$$y'=y\left(v\frac{u'}{u}+v' lnu\right).$$

در این معادله $y=u^v$ قرار داده و بدست می‌آوریم

$$y'=v\,u^{v-1}u'+u^v v' lnu\ .$$

بنابراین، مشتق یک تابع مرکب نمایی شامل دو جمله است: اولین جمله با این فرض بدست می‌آید، که در موقع مشتق‌گیری، u تابعی از x و v ثابت فرض شده است (به عبارت دیگر، u^v را تنها به عنوان توانی از یک تابع در نظر می‌گیریم)؛ دومین جمله با این فرض بدست می‌آید که v تابعی از x و u ثابت است (یعنی، u^v را تنها به عنوان تابعی نمایی در نظر می‌گیریم).

تبصره: روش بکار برده شده در بالا برای یافتن مشتقات (یعنی، ابتدا یافتن لگاریتم تابع مفروض) در مشتق‌گیری از توابع کاربرد فراوانی دارد. اغلب این روش، محاسبات را بسیار ساده می‌سازد.

مثال ۲۷: مشتق توابع زیر را بدست آورید:

$(i)\quad y=e^x\, ln\sin x$ $\qquad (ii)\quad y=\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$ $\qquad (iii)\quad y=(\sin x)^{tgx}$

$(iv)\quad y=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3\, e^x}$.

حل. $(i)\quad y=e^x\, ln\sin x \Rightarrow y'=e^x\, ln\sin x+e^x\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\Rightarrow y' = e^{x}\left(tgx + ln\sin x\right)$$

$$y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \Rightarrow y' = nx\left(\frac{x}{n}\right)^{nx-1} \times \frac{1}{n} + \left(\frac{x}{n}\right)^{n} \times nln\frac{x}{n} \qquad (ii)$$

$$\Rightarrow y' = n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(1 + ln\frac{x}{n}\right).$$

$$y = \left(\sin x\right)^{tg\,x} \Rightarrow y' = tg\,x\left(\sin x\right)^{tg\,x-1}.\cos x + \left(\sin x\right)^{tgx}\frac{1}{\cos^{2} x}ln\,\sin x \qquad (iii)$$

$$\Rightarrow y' = \left(\sin x\right)^{tgx}\left(1 + \frac{1}{\cos^{2} x}ln\sin x\right).$$

(iv) از طرفین معادله لگاریتم می‌گیریم:

$$lny = ln\frac{\left(x+1\right)^{2}\sqrt{x-1}}{\left(x+4\right)^{3}e^{x}} = 2\,ln\left(x+1\right) + \frac{1}{2}ln\left(x-1\right) - 3\,ln\left(x+4\right) - x.$$

با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی بالا نسبت به x داریم

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2\left(x-1\right)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

طرفین تساوی بالا را در y ضرب کرده و بجای y مقدار $\frac{(x+1)^{2}\sqrt{x-1}}{(x+4)^{3}e^{x}}$ را قرار می‌دهیم:

$$y' = \frac{(x+1)^{2}\sqrt{x-1}}{(x+4)^{3}e^{x}}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right].$$